S7	seniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2023./24.

Kolinearnost i konpunktalnost

Stella Čolo

2.12.2023.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

1. Uvod

U ovom predavanju bavit ćemo se dokazivanjem kolienarnosti i konpunktalnosti. Neke od čestih ideja dokazivanja kolinearnosti su:

1. **Kutovi**- točka B leži na dužini AC ako i samo ako $\angle ABC = 180$. Druga metoda je pomoću četvrte točke D. Ako vrijedi $\angle DAB = \angle DAC$, točke A, B, C su kolinearne.
2. **Duljine**-točka B leži na dužini AC ako i samo ako $AB + BC = AC$.
3. **Menelajev teorem**-Neka je ABC trokut i neka su D, E i F točke na pravcima BC, AC i AB, redom. Tada su točke D, E i F kolinearne ako i samo ako vrijedi:
$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$$
4. **Preko četvrte točke**- Ako želimo dokazati da točke A, B, C leže na pravcu, dovoljno je dokazati da su točke A, B, D i C, B, D kolinearne za neku točku D
5. **Homotetija**- za svaku točku vrijedi da će biti kolinearna sa svojom slikom i središtem homotetije
6. **Simpsonov pravac**- Neka je ABC trokut i P bilo koja točka na opisanoj kružnici $\triangle ABC$. Neka su X, Y, Z nožišta okomica iz P na pravce BC, CA i AB. Dokaži da su točke X, Y, Z kolinearne.
7. **Eulerov pravac** - pravac na kojem leže ortocentar, središte opisane kružnice, središte kružnice devet točaka i težište

A za dokazivanje konpunktalnosti(da se tri pravca sijeku u jednoj točki) koristimo:

1. **Radikalno središte**- za sve tri kružnice čija središta ne leže na istom pravcu postoji točka koju zovemo radikalno središte u kojoj se sve tri radikalne osi tih kružnica sijeku(radikalna os dviju kružnica je pravac čije točke imaju jednaku potenciju s obzirom na obje kružnice)
2. **Cevin teorem**-Neka su D, E i F točke na stranicama BC, AC i AB trokuta ABC, redom. Tada su AD, BE i CF konkurentni ako i samo ako vrijedi:
$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$
3. **Fantomiranje**- svedemo dokazivanje konpunktalnosti na dokazivanje kolinearnosi tako što uzmemo presjek dva pravca i dokažemo da leži na trećem pravcu
4. **Homotetija**-ako postoji homotetija koja slika $\triangle ABC$ u $\triangle A'B'C'$, pravci AA', BB', CC' su konpunktalni i njihovo sjecište je centar te homotetije.

Zadaci

1. Dokaži da se simetrale unutarnjih kuteva trokuta sijeku u jednoj točki(središte upisane kružnice).

2. Dokaži da se visine u trokutu sijeku u jednoj točki(ortocentar).

3. Dokažite da se simetrale stranica $\triangle ABC$ sijeku u jednoj točki (središtu opisane kružnice).

4. Dokažite da se težišnice $\triangle ABC$ sijeku u jednoj točki (težištu).

5. Dan je trokut ABC s tupim kutom kod vrha B, neka su D i E polovišta stranica AB i AC redom, F točka na stranici BC takva da je $\angle BFE$ pravi, te G točka na dužini DE takva da je kut BGE pravi. Dokaži da točke A, F, G leže na istom pravcu ako i samo ako je $2|BF| = |CF|$.

6. Neka je ABC šiljastokutni trokut. Točka B' je osnosimetrična slika točke B s obzirom na pravac AC, a točka C' je osnosimetrična slika točke C s obzirom na pravac AB. Kružnice opisane trokutima ABB' i ACC' sijeku se u točkama A i P. Dokaži da središte kružnice opisane trokutu ABC leži na pravcu AP.

7. Upisana kružnica šiljastokutnog trokuta ABC dodiruje stranice BC, CA, AB redom u točkama D, E, F. Središte te kružnice je točka S, a pravac DS siječe dužinu EF u točki P. Ako je M polovište stranice BC, dokaži da su točke A, P, M kolinearne.

8. Dokažite postojanje Simpsonovog pravca.

9. Točkom T dane kružnice k povucimo tri različite tetive TA, TB, TC. Neka su k_1, k_2, k_3 kružnice kojima su redom TA, TB, TC promjeri. Ako su D, E, F preostala sjecišta redom kružnica k_2 i k_3, k_1 i k_3, k_1 i k_2, dokažite da točke D, E, F leže na jednom pravcu.

10. Neka je $ABCD$ paralelogram u kojem vrijedi $AC = BC$. Točka P odabrana je na produžetku polupravca AB preko točke B. Opisana kružnica trokuta ACD siječe dužinu PD u točki Q. Kružnica opisana trokutu APQ siječe dužinu PC u R. Dokaži da se pravci CD, AQ, BR sijeku u jednoj točki.

11. NEka je ABC šiljastokutni trokut u kojem vrijedi $AB < AC$,, D je nožište visine iz A. Neka su R i Q redom težišta trokuta ABD i ACD. Neka je P točka na dužini BC različita od D takva da su točke P Q R i D konciklične. Dokaži da se pravci AP BQ i CR sijeku u jednoj točki.

12. Dan je konveksan peterokut $ABCDE$ u kojem vrijedi $AB = BC = CD$, $\angle EAB = \angle BCD$, i $\angle EDC = \angle CBA$. Dokaži da se okomica iz točke E na BC, dužina AC i BD sijeku u jednoj točki.

2. Hintovi

1. Gledajte udaljenost točaka na simetrali kuta od stranica.

2. Neka je točka H_1 presjek visina iz A i B. Dokaži da je CH_1 okomito na AB.

3. Označimo sjecište dviju simetrala stranica sa S. U kakvom su odnosu udaljenosti S od vrhova trokuta?

4. Neka su M, N redom polovišta stranica BC, AC. Točke T, T' su redom sjecišta težišnica iz vrhova B, C s AM. Što znamo o odnosu $|AT|, |AT'|$ i $|AM|$

5. Koja je veza kolinearnosti točaka A, F, G te $|FB|$ i $|GD|$?

6. Uočimo da su točke P, B, C' kolinearne.

7. Nekoliko primjena sinusovog poučka.

8. Dokaži da $\angle PC_1A_1 = \angle PC_1B_1$

9. Simpsonov pravac.

10. Angle chase nakon uvođenja novog presjeka.

11. Homotetija.

12. Uvedimo 3 presjeka produžetaka stranica peterokuta.

3. Rješenja

1. Neka je S presjek simetrali kutova kod vrhova A i B. Duljine okomica iz S na stranice AB, BC, CA su redom x, y, z, znamo da $y = z$ (jer se S nalazi na simetrali kuta kod vrha A) i $x = y$(jer se S nalazi na simetrali kuta kod vrha B). Iz toga slijedi $x = z$, odnosno S se nalazi na simetrali kuta kod vrha C.

2. Neka je točka H_1 presjek visina iz A i B. Nožišta visina iz vrhova B i C su točke D, E, točka F je presjek AB i CH_1. $\angle FCE = \angle H_1CE = \angle H_1DE = \angle ADE = \angle ABE =>$ četverokut $FBCE$ je tetivan pa $\angle BFC = \angle BEC = 90$ tj. H_1C je okomito na AB.

3. Neka je S sjecište simetrali stranica AB i BC. S leži na simetrali stranice AB pa $|AS| = |BS|$, nalazi se i na simetrali stranice BC pa $|BS| = |CS|$. Dakle, $|AS| = |CS|$. Iz toga slijedi da S leži na simetrali dužine $AC =>$ simetrale dužina AB, BC i AC sijeku se u S.

4. Neka su M, N redom polovišta stranica BC, AC. Točke T, T' su redom sjecišta težišnica iz vrhova B, C s AM. Znamo da je MN srednjica trokuta ABC pa su trokuti ATB, NTM slični s faktorom 2 $=> AT = 2TM = 2\frac{AM}{3}$. Analogno dobijemo da $AT' = 2\frac{AM}{3}$ iz čega slijedi da $T = T'$, odnosno da se sve tri težišnice sijeku u jednoj točki.

5. Drz 2012 1.raz

6. Drž 2017. 1. raz

7. Drž 2011. 4. raz

8. Neka su A_1, B_1, C_1 nožišta okomica iz P redom na CB, AC, AB. $\angle PC_1B = 90$ i $\angle PA_1B = 90 =>$ četverokut PBC_1A_1 je tetivan. Slijedi $\angle PC_1A_1 = \angle PBA_1$. Dalje, $\angle PBA_1 = \angle PBC = \angle PAC$. Analogno $PC1AB1$ je tetivan četverokut pa vrijedi $\angle PAC = \angle PAB_1 = \angle PC_1B_1 => \angle PC_1A_1 = \angle PC_1B_1$ iz čega slijedi da su B_1, A_1 i C_1 kolinearne.

9. D leži na BC jer su zbog Talesovog poučka $\angle BDT = \angle CDT = 90$, pa $\angle BDC = \angle BDT + \angle CDT = 180$. D je nožište okomice iz T na BC. Analogno, E je nožište okomice iz T na AC i F je nožiše okomice iz T na AB. Kolinearnost točaka D, E, F sada direktno slijedi iz Teorema o Simsonovom pravcu, primijenjenog na trokut ABC i točku T.

10. IMOSHL 2021 G1. https://artofproblemsolving.com/community/c6h2882542p25627509

11. MEMO 2018 I3 https://artofproblemsolving.com/community/c6h1701815p10935880

12. IMOSHL 2017. G1 https://artofproblemsolving.com/community/c6h1671264p10632265