J1	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Split, sezona 2023./24.

Tablice

Ivan Miošić

27.1.2024.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

1. Uvod

U ovom predavanju razmatrat ćemo problemske matematičke zadatke s **tablicama**. Konkretnije, većinom ćemo imati posla s pravokutnim tablicama podijeljenim na polja koja sadrže neke brojeve ili oznake.

Prisjetimo se prvo nekih tablica koje su izašle iz okvira matematike i postale široko popularne. Prvo što vam može pasti na pamet su popularne sudoku zagonetke, zajedno sa milijun i jednom varijantom istih. Iako se uglavnom koriste za razbibrigu i zabavnu mentalnu aktivnost, postoje relativno složene metode njihovog rješavanja. Primjerice, sljedeći sudoku vjerojatno neće biti riješen u jedno prosječno popodne na plaži:

3								1
8	6	5						
4							7	3
				7		9		2
	5			4				
		9	3					
			6		8	3		
		4			5		8	
							6	

Slika 1: Sa stranice https://sudoku.com/, ekspert razina

Na navedenoj stranici su izložene i neke od naprednijih metoda rješavanja sudoku-a.

Slično tome, popularni su i latinski kvadrati.

Tablice se ponekad koriste kao pomoćni alat u rješavanju logičkih zagonetki. Recimo, u ovom kolu MONOM-a, logičko-kombinatorni zadatak za početnike i kadete je sljedeći:

Zadatak 1. Ana, Branka, Cvjeta i Dubravka imaju 5, 6, 7 ili 8 godina i sve imaju različiti broj godina. Također, znamo i da sve idu spavati u različita vremena: 20:00, 20:30, 21:00 i 21:30. Poznato je sljedeće:

1. Najstarija među njima ide spavati 30 minuta prije Branke.
2. Ana ide spavati nakon Dubravke.
3. Ana ima 6 godina.
4. Najmlađa ide spavati u 20:00.
5. Ona koja ide spavati u 20:30 je ili stara 6 godina ili se zove Branka.

Tko ima koliko godina i u koje vrijeme ide spavati?

Rješenje 1. Napravi tablicu i „igraj sudoku". □

Općenito, što nam sve može pomoći u rješavanju zadataka s tablicama? Samo je nebo granica, ali evo stvari koje se često pojavljuju:

- Promatranje susjednih polja (onih sa zajedničkom stranicom) - lokalni pristup;
- Određivanje svojstava koja moraju zadovoljavati svi ili dio elemenata tablice kao skup - globalni pristup;
- Razmatranje elemenata u istom retku, stupcu ili dijagonali;
- Promatranje zbroja elemenata tablice, po retcima, po stupcima i/ili po dijagonali;
- Dirichletov princip;
- Prebrojavanje;
- Promatranje broja pojavljivanja nekog elementa tablice i svojstava tog broja.

Napomenimo još samo da se ovdje ne bavimo zadacima o *pločama*, gdje se obično govori o popločavanjima i bojanjima polja ploče, ili pak o igrama na ploči. To ostavljamo za druga predavanja, a neka već i možete pronaći u MNM-ovoj arhivi na Školjci.

Krenimo na zadatke!

Lakši zadaci

1. U svako polje kvadratne ploče 4×4 upiši po jedno od četiri slova: A, B, C, D i po jedan od četiri broja: 1, 2, 3, 4, tako da budu ispunjeni sljedeći uvjeti:
   - u svakom retku i u svakom stupcu svako od tih slova i svaki od tih brojeva pojavljuje se točno jednom;
   - na ploči se svaka kombinacija (par) jednog slova i jednog broja nalazi na točno jednom polju.

2. Upiši u prazna polja 3×3 tablice sa donje slike brojeve tako da u svakom retku, stupcu i dijagonali broj u sredini bude aritmetička sredina druga dva broja. Obrazloži!

3. U 5×5 tablicu sa donje slike moguće je upisati prirodne brojeve na prazna mjesta tako da brojevi u svakom retku i stupcu čine aritmetički niz. Odredi broj koji se nalazi na mjestu označenom zvjezdicom ($*$).

	8	
11		
		29

			*	
	74			
				186
		103		
0				

Umjereni zadaci

4. U svako polje 5×5 tablice upisujemo jedan od brojeva -1, 0, 1 te zbrajamo brojeve po stupcima, retcima i dijagonalama. Dokažite da će među tim zbrojevima dva biti jednaka.

5. Marko je nacrtao pravokutnik dimenzija 20×15 i crtama ga podijelio na jedinične kvadrate. Koliko ukupno kvadrata ima na toj slici?

6. Na koliko se načina može u svako polje tablice 2024×2024 upisati po jedan prirodni broj tako da zbroj brojeva u bilo koja tri uzastopna polja u istom retku ili stupcu bude 5?

7. Kvadratna tablica 2009×2009 popunjena je brojevima $1, 2, 3, \ldots, 2009$ tako da se u svakom retku i svakom stupcu pojavljuje svaki od tih brojeva. Ako je tablica simetrična u odnosu na jednu dijagonalu, onda se i na toj dijagonali pojavljuju svi brojevi $1, 2, 3, \ldots, 2009$. Dokaži!

8. Za prirodni broj n kažemo da je tablica s tri retka i n stupaca *čarobna* ako postoji prirodni broj $k, 1 \leq k \leq n$, takav da se

- u prvom retku nalaze redom brojevi 1, 2, $\ldots$, n,
- u drugom retku nalaze redom brojevi k, $k+1$, $\ldots$, n, 1, 2, $\ldots$, $k-1$,
- u trećem retku nalaze brojevi od 1 do n u takvom poretku da su zbrojevi triju brojeva u svakom stupcu međusobno jednaki.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji čarobna tablica i za svaki takav n odredi koliko ima čarobnih tablica.

9. U svako polje tablice 10×10 upisan je po jedan prirodni broj, a svih 20 zbrojeva brojeva u njezinim retcima i stupcima međusobno su različiti. Koliko iznosi najmanji mogući zbroj svih brojeva u tako popunjenoj tablici?

10. Neka je n prirodni broj. Na koliko načina možemo tablicu $n \times n$ popuniti brojevima 1, 2, -1, -2 tako da umnožak brojeva u svakom retku bude jednak -2 i da umnožak brojeva u svakom stupcu bude također jednak -2?

11. Tablica T je dobivena uklanjanjem tri polja u kutovima tablice 7×7. U svako od 46 polja tablice T upisan je neki prirodni broj. Razlika brojeva u bilo koja dva susjedna polja je najviše 4. Dokaži da su u neka dva polja tablice T upisani isti brojevi.

12. Dana je tablica 6×6.

a) Ako je označeno bilo kojih 9 polja tablice, dokaži da je moguće odabrati tri retka i tri stupca koji sadrže sva označena polja.

b) Označi 10 polja tablice tako da koja god tri retka i tri stupca odaberemo, uvijek postoji bar jedno označeno polje koje nije u odabranim stupcima niti recima.

13. U nekom nizu realnih brojeva, svaka suma od 7 uzastopnih članova je pozitivna, a svaka suma od 11 uzastopnih članova je negativna. Pronađi najveći mogući broj članova ovog niza.

Teži zadaci

14. Neka je $n > 1$ prirodni broj. Na koliko se načina u polja ploče dimenzija $2 \times n$ mogu upisati brojevi 1,2,...,$2n$ tako da uzastopni brojevi budu u poljima sa zajedničkom stranicom?

15. U sva polja tablice 100×100 upisani su brojevi $1, 2, \ldots, 100$ i to tako da se svaki pojavljuje točno 100 puta. Pokažite da postoji redak ili stupac u kojem ima barem 10 različitih brojeva.

16. Za dva polja tablice 10×10 kažemo da su *prijateljska* ako imaju barem jedan zajednički vrh. U svako polje tablice upisan je po jedan prirodni broj manji ili jednak 10, tako da su brojevi u prijateljskim poljima relativno prosti. Dokaži da postoji broj koji se pojavljuje u toj tablici barem 17 puta.

17. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dva niza različitih realnih brojeva. U tablici dimenzija $n \times n$ broj u i-tom redu i j-tom stupcu je jednak $a_i + b_j$. Produkti brojeva u svakom redu tablice su jednaki. Dokaži da su i produkti brojeva u svakom stupcu tablice također jednaki.

18. U svako polje tablice $m \times n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) upisano je slovo A ili B. Pritom nikoja dva susjedna polja (sa zajedničkom stranicom) ne sadrže isto slovo. U jednom koraku biraju se dva susjedna polja, i oba slova na tim poljima zamijene se novim slovima po sljedećem pravilu:

- umjesto slova A upisuje se slovo B
- umjesto slova B upisuje se slovo C
- umjesto slova C upisuje se slovo A.

Za koje m i n nakon konačno mnogo koraka možemo postići da u svim poljima u kojima je na početku bilo napisano slovo A sada piše slovo B, a u svim poljima u kojima je na početku bilo napisano slovo B sada piše slovo A?

19. U tablicu $n \times n$, $n \geqslant 2$, potrebno je upisati brojeve 1, 2, 3 i 4 tako da svaka četiri polja koja imaju jedan zajednički vrh sadrže četiri različita broja. Na koliko je načina to moguće napraviti?

20. 5×5 tablica naziva se *regularnom* ako svako njezino polje sadrži jedan od četiri različita realna broja, tako da se svaki od njih pojavljuje točno jednom u svakoj 2×2 podtablici. Zbroj svih brojeva regularne tablice naziva se *ukupnim zbrojem tablice*. Za bilo koja četiri različita realna broja, konstruiramo sve moguće regularne tablice i izračunamo njihove ukupne zbrojeve. Odredite koji je najveći mogući broj različitih dobivenih ukupnih zbrojeva tablica.

Lakši zadaci

1. Pažljivo i sistematično rasporediti elemente.

2. Postaviti jednadžbe i riješiti.

3. Ponovno jednadžbe, malo ih je više ovaj put.

Umjereni zadaci

4. Dirichletov princip.

5. Pažljivo brojati.

6. Uočiti da upisivanjem nekoliko vrijednosti automatski određujemo i druge.

7. Parnost broja pojavljivanja svakog broja.

8. Promatrati male n-ove i pokušati napraviti pretpostavku.

9. Pokušati konstruirati najmanji mogući zbroj.

10. Promatrati kada je određen umnožak u retcima i stupcima.

11. Dirichlet, razmišljajte „globalno".

12. Dirichlet.

13. Napravi tablicu.

Teži zadaci

14. Promatrati prvo manje n-ove, postaviti hipotezu, vidjeti čime je određen raspored brojeva.

15. Brojati uređene parove (redak, broj).

16. Dirichlet + promatranje maksimalnog broja pojavljivanja određenih skupina brojeva.

17. Definirati funkcije koje opisuju umnoške brojeva u stupcima i retcima.

18. Promatrati broj napravljenih operacija na pojedinom polju.

19. Rekurzija.

20. Ne pokušavati ovo kod kuće.

Lakši zadaci

1. Općinsko natjecanje 2011 SŠ3 5
2. Općinsko natjecanje 2020 SŠ2 5
3. 1988 AIME Problem 6

Umjereni zadaci

4. Najmanji mogući zbroj je $5 \cdot (-1) = -5$, a najveći $5 \cdot 1 = 5$. Svi mogući zbrojevi su dakle $-5, -4, \ldots, 4, 5$ - ukupno je 11 mogućih zbrojeva. S druge strane, u tablici je 5 redaka i 5 stupaca te 2 dijagonale - ukupno 12 zbrojeva. Po Dirichletovom principu zaključujemo da se jedan mogući zbroj nužno mora ponoviti.
5. Županijsko natjecanje 2009 SŠ1 5
6. Školsko/gradsko natjecanje iz matematike 2018, SŠ1 A 5
7. Županijsko natjecanje 2009 SŠ3 5
8. Županijsko natjecanje iz matematike 2015, SŠ1 A 5
9. Općinsko natjecanje iz matematike 2021, SŠ2 4
10. Županijsko natjecanje iz matematike 2016, SŠ4 A 5
11. Županijsko natjecanje iz matematike 2018, SŠ4 A 4
12. Državno natjecanje 2013 SŠ2 5
13. Vidi zadnji zadatak na https://www.skoljka.org/metamath23/task/2322/.

Teži zadaci

14. Županijsko natjecanje 2020 SŠ2 5
15. Županijsko natjecanje 2004 SŠ3 4
16. Državno natjecanje 2012 SŠ4 5
17. Vidi na linku (tablica je rotirana u ovom rješenju).
18. Državno natjecanje 2009 SŠ2 5
19. Državno natjecanje 2010 SŠ4 5
20. JBMO 2016 - Problem 4